XXXV TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA 2014 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. En una fiesta se repartieron entre los invitados 47 chocolates y 74 caramelos. Cada chica recibió un chocolate más que cada chico y cada chico recibió 1 caramelo más que cada chica. Determinar el número de chicos (varones y mujeres) de la fiesta. 3 PUNTOS

2. Pedro marcó varias casillas de un tablero de 5×5. Beto gana si puede cubrir todas las casillas marcadas con fichas en *L*, de tres casillas cada una. Las fichas deben estar dentro del tablero y no pueden superponerse. Determinar el menor número de casillas que debe marcar Pedro para evitar que Beto gane. (Las casillas de las fichas en *L* deben coincidir con casillas del tablero.) 5 PUNTOS

3. Sobre una mesa cuadrada se ha colocado un mantel cuadrado (pueden ser de diferente tamaño) sin dobleces ni arrugas. Las cuatro esquinas de la mesa están descubiertas y las cuatro partes adyacentes del mantel que cuelgan son triangulares. Sabiendo que dos de las partes colgantes adyacentes son iguales, demostrar que las otras dos partes también son iguales. 6 PUNTOS

4. El rey llamó a dos hechiceros. Le ordena al primer hechicero que escriba 100 números enteros positivos (no necesariamente distintos) uno en cada una de 100 tarjetas, sin decirle al segundo hechicero qué números escribió. El segundo hechicero debe determinar correctamente todos estos números, o en caso contrario ambos hechiceros serán decapitados. Se le permite al primer hechicero darle al segundo hechicero una lista de números distintos, cada uno de los cuales es o bien uno de los números de las tarjetas o bien la suma de algunos de estos números. El primer hechicero tiene prohibido decirle al segundo qué números están en las tarjetas y qué números son sumas de números de las tarjetas. Finalmente el rey le arranca a cada hechicero tantos pelos de su barba como la cantidad de enteros que tenga la lista que el primer hechicero le dio al segundo. Determinar el mínimo número de pelos de la barba que debe perder cada hechicero para tener la certeza de permanecer vivo. (El primer hechicero sabe desde antes de escribir los números en las tarjetas que el segundo hechicero deberá adivinarlos y con qué procedimiento.) 7 PUNTOS

5. Hay varios puntos blancos y negros. Cada punto blanco está conectado con cada punto negro mediante un segmento. Cada segmento tiene asociado un número entero positivo. Para cada circuito cerrado la multiplicación de los números asociados a los segmentos que pasan de puntos blancos a puntos negros es igual a la multiplicación de los números asociados a segmentos que pasan de puntos negros a puntos blancos. Determinar si es posible asociar números a cada punto de modo que los números asociados a cada segmento sean la multiplicación de los números de sus extremos. 7 PUNTOS

6. Un cubo de $3\times3\times3$ está hecho de cubos de $1\times1\times1$. Determinar el máximo número de cubos de $1\times1\times1$ que se pueden quitar de modo que el sólido resultante tenga las siguientes características:

1) La proyección de este sólido sobre cada cara del cubo original sea un cuadrado de 3×3;

2) El sólido resultante sea conexo por caras, es decir, comenzando por cada cubo de $1\times1\times1$ se puede llegar a cualquier otro cubo de $1\times1\times1$ siguiendo una cadena de cubos consecutivos, cada uno con una cara común con su sucesor. 9 PUNTOS

7. Se han marcado los puntos $A_1, A_2, ..., A_{10}$ alrededor de una circunferencia, en el sentido de las agujas del reloj. Se sabe que estos puntos se pueden agrupar en pares de puntos simétricos con respecto al centro de la circunferencia. Inicialmente, en cada punto marcado hay un saltamontes. Cada minuto uno de los saltamontes salta sobre uno de sus vecinos a lo largo de la circunferencia de modo que la distancia relativa entre ellos no cambia. No está permitido saltar sobre ningún otro saltamontes ni caer en un punto que ya esté ocupado. Ocurre que en algún momento nueve saltamontes se encuentran sobre los puntos $A_1, A_2, ..., A_9$ y el décimo saltamontes está en el arco $A_9A_{10}A_1$. Determinar si es necesariamente cierto que este saltamontes esté exactamente sobre el punto A_{10}. 9 PUNTOS

XXXV TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA 2014 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. Ana escribió varios números 1, colocó entre cada dos de ellos un signo + o un signo $\times$ y colocó varios paréntesis. Obtuvo como resultado 2014. Su amigo Beto cambió todos los + por $\times$, todos los $\times$ por + y dejó los paréntesis donde los colocara Ana; también obtuvo 2014. Determinar si esto puede ser cierto. 3 PUNTOS

2. a) Determinar si es cierto que cualquier polígono convexo se pueda partir mediante una recta en dos polígonos de perímetros iguales y con sus lados mayores iguales. 4 PUNTOS
b) Determinar si es cierto que cualquier polígono convexo se pueda partir mediante una recta en dos polígonos de perímetros iguales y con sus lados menores iguales. 4 PUNTOS

3. El rey llamó a dos hechiceros. Le ordena al primer hechicero que escriba 100 números reales positivos (no necesariamente distintos) uno en cada una de 100 tarjetas, sin decirle al segundo hechicero qué números escribió. El segundo hechicero debe determinar correctamente todos estos números, o en caso contrario ambos hechiceros serán decapitados. Se le permite al primer hechicero darle al segundo hechicero una lista de números distintos, cada uno de los cuales es o bien uno de los números de las tarjetas o bien la suma de alguno de estos números. El primer hechicero tiene prohibido decirle al segundo qué números están en las tarjetas y qué números son sumas de números de las tarjetas. Finalmente el rey le arranca a cada hechicero tantos pelos de su barba como la cantidad de números reales tenga la lista que el primer hechicero le dio al segundo. Determinar el mínimo número de pelos de la barba que debe perder cada hechicero para tener la certeza de permanecer vivo. (El primer hechicero sabe desde antes de escribir los números en las tarjetas que el segundo hechicero deberá adivinarlos y con qué procedimiento.) 6 PUNTOS

4. En el plano están marcados todos los puntos con coordenadas enteras (x, y), $0 \le y \le 10$. Consideramos un polinomio de grado 20 con coeficientes enteros. Hallar el máximo número posible de puntos marcados que pueden estar en su gráfico. 7 PUNTOS

5. Se tiene un triángulo no isósceles. Pedro y Beto juegan por turnos el siguiente juego. En cada uno de sus turnos, Pedro elige un punto del plano. Beto responde coloreándolo de rojo o azul. Pedro gana si algún triángulo semejante al original tiene sus tres vértices del mismo color. Hallar el mínimo número de movidas que necesita Pedro para ganar no importa cómo juegue Beto (independientemente de la forma del triángulo dado). 8 PUNTOS

6. En cierto país, cada población tiene asignado un número. En una guía de vuelos, para cada dos números (que corresponden a dos poblaciones) hay una indicación de si están o no conectadas por un vuelo directo sin escalas. Se sabe que para todo par de números asignados M y N uno puede cambiar la numeración de las poblaciones de modo que la población con el número M obtenga el número N pero la guía siga siendo correcta.
Determinar si siempre es cierto que para cualquier par M y N de números asignados uno pueda cambiar la numeración de las poblaciones de manera que las poblaciones numeradas con M y N intercambien sus números y la guía siga siendo correcta. 9 PUNTOS

7. Consideramos un polinomio $P(x)$ tal que

$$P(0)=1;\ \left(P(x)\right)^2 = 1 + x + x^{100}Q(x),\text{ donde } Q(x) \text{ también es un polinomio.}$$

Demostrar que en el polinomio $\left(P(x)+1\right)^{100}$ el coeficiente de x^{99} es cero. 10 PUNTOS